МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Олимпиада по физика, Национален кръг, Плевен, 1 май 2010 г.
Решения на задачите

Задача 1. Сензор за сили.

а) $F_{в}$ (α_{max}) = 0,15 N ……………………………………….1 *точка*

$F_{в}$ (α = 0) = 1,2 N ……………………………………………1 *точка*

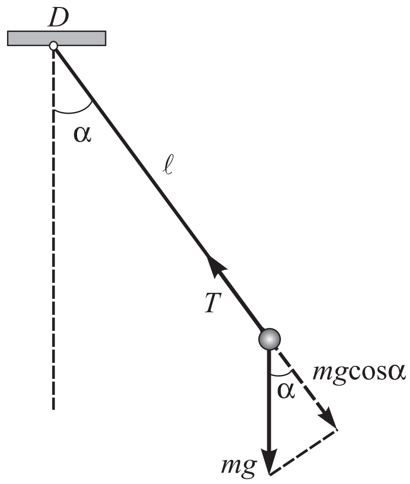
б) Времето между два максимума на силата $F_{в}$ е равно на половината от периода T на люлеене на махалото. От графиката определяме:

T = 1,45 s……………………………………………………………. 1 *точка*

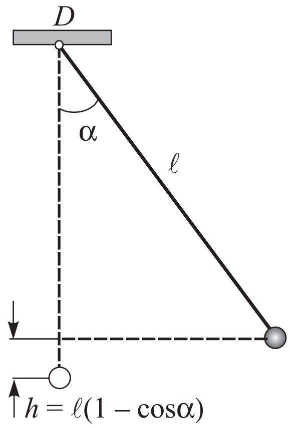
Приемаме, че люлеенето на махалото е хармонично трептене.

Дължината на махалото е $\ell = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} = 52$ cm. ....1 *точка*

в) При люлеенето на махалото топчето извършва неравномерно движение по окръжност с радиус ℓ. Означаваме с α максималния ъгъл между нишката и вертикалната ос (*фиг.*1).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В това най-горно положение топчето е неподвижно и неговото центростремително ускорение е нула. Условието за движение по окръжност има вида:

(1) $T - mg\cos\alpha = \dfrac{mv^2}{\ell} = 0$ ....1 *точка*

Тъй като нишката е безмасова, силите на опън в нейните два края са равни: нишката действа на точката на окачване със сила

$F_1 = T = mg\cos\alpha$..1 *точка*

Сензорът измерва вертикалната компонента на тази сила

(2) $F_{1в} = F_1\cos\alpha = mg\cos^2\alpha$. ....1 *точка*

Когато топчето преминава през равновесното си положение, уравнението за движение по окръжност има вида

(3) $T - mg = \dfrac{mv^2}{\ell}$ ....1 *точка*

Скоростта v определяме от закона за запазване на енергията (*фиг.* 2):

(4) $\dfrac{mv^2}{2} = mgh = mg\ell(1-\cos\alpha)$. ....1 *точка*

Заместваме v^2 от уравнение (4) в уравнение (3) и определяме силата на опъване на нишката: $T = mg(3 - 2\cos\alpha)$. Тази сила е насочена вертикално. Нишката действа на сензора със същата по големина вертикална сила

(5) $F_{2в} = T = mg(3 - 2\cos\alpha)$ ……………………....…………..1 *точка*

г) $F_{1в}$ и $F_{2в}$ са съответно минималната и максималната стойност на силата $F_в$, която измерва сензорът. Числените стойности се определят от графиката (подусловие **а**). От уравнения (2) и (5) получаваме

(6) $\dfrac{F_{2в}}{F_{1в}} = \dfrac{(3 - 2\cos\alpha)}{\cos^2\alpha}$, ...1 *точка*

където $\dfrac{F_{2в}}{F_{1в}} = 8$. Това е квадратно уравнение за cosα, което има два корена:

$\alpha_1 = 60^o$ .... 0,5 *точки*

$\alpha_2 = 139^o$ ....0,5 *точки*

През цялото време на люлеене на махалото нишката трябва да е опъната. Това означава, че максималният ъгъл на отклонение е $\alpha < 90^o$. Следователно вторият корен няма физически смисъл...1 *точка*

д) Масата на топчето определяме от уравнение (5) или (2):

$m = \dfrac{F_{2в}}{g(3 - 2\cos\alpha)} = 61$ g. ……………………......……......…1 *точка*

е) Амплитудата на люлеене на махалото е голяма ($\alpha = 60^o$).

Затова люлеенето само с приближение може да се приеме за хармонично трептене ....1 *точка*

Забележка. Периодът на махалото при големи ъгли на отклонение е

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}\left(1 + \dfrac{1}{16}\alpha^2 + \dfrac{11}{3072}\alpha^4 + ...\right)$.

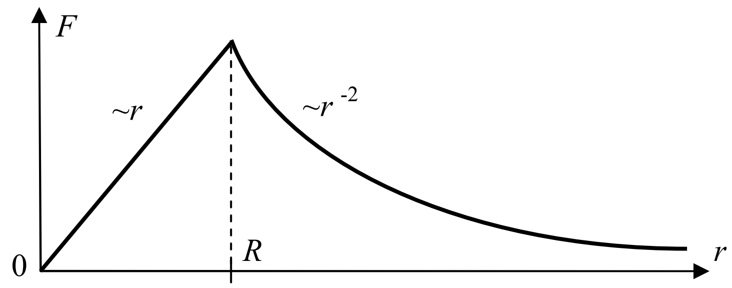
За $\alpha = 60° \approx 1$ rad периодът е $T \approx 1,065\left(2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}\right)$, т.е. той е с около 6,5% по-голям от периода на математично махало, което трепти с малка амплитуда.

<u>Задача 2.</u> Пудинг със сливи.

а) Когато електронът се намира на разстояние r от центъра на положително зареденото кълбо при $r < R$, на него му действа Кулонова сила само от частта заряд, намираща се на разстояние от центъра $x \le r$ **[0,5 т.]**. Обемната плътност ρ на електричния заряд вътре в кълбото е $\rho = \dfrac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, следователно зарядът на кълбото с радиус r е $q(r) = \rho V(r) = \dfrac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\dfrac{4}{3}\pi r^3 = e\dfrac{r^3}{R^3}$ **[0,5 т.]**. Следователно, силата $F(r)$, която действа на електрона, когато се намира на разстояние r от центъра на положително зареденото кълбо при $r < R$, е

$F(r) = \dfrac{eq(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\dfrac{r^3}{R^3} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$ **[1 т.]**.

б) Зависимостта на силата $F(r)$ от разстоянието r при $r \in [0, \infty]$ изглежда така:



[2 т.]

в) Работата A, необходима да се премести неподвижен електрон от центъра на положително зареденото кълбо до безкрайност, е сума на две работи: работата A_{0-R}, необходима да се премести неподвижен електрон от центъра на положително зареденото кълбо до неговата повърхност, и работата $A_{R-\infty}$, необходима да се премести неподвижен електрон от повърхността на кълбото до безкрайност **[0,5 т.]**. От горната фигура се вижда, че $A_{0-R} = \dfrac{F_{\max}.R}{2} = \dfrac{F(R).R}{2} = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ **[1 т.]**. Втората работа $A_{R-\infty}$ е равна на $A_{R-\infty} = e.\varphi(R) = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$ **[1 т.]**. Следователно, $A_{0-\infty} = A_{0-R} + A_{R-\infty} = \dfrac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ **[0,5 т.]**.

г) Радиусът R на кълбото е $R = \dfrac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 A_{отд}}$ **[0,5 т.]** $= \dfrac{3(1{,}6.10^{-19})^2}{8\pi.8{,}85.10^{-12}.13{,}8.1{,}6.10^{-19}} =$ 1,56. 10^{-10} m = 1,56 Å **[1,5 т.]**

д) тъй като силата $F(r)$, която действа на електрона, когато се намира вътре в кълбото, е пропорционална на радиуса r, то електронът ще извършва хармонично трептене **[0,5 т.]** с честота $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}}$ **[1,5 т.]**.

е) Дължината на вълната на електромагнитната вълна, ако електронът при трептенето си излъчва такава, е $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 2\pi c\sqrt{\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}{e^2}} = \dfrac{2\pi c R}{e}\sqrt{4\pi\varepsilon_0 R m}$ **[0,5 т.]** = $\dfrac{2\pi.3.10^8.1{,}56.10^{-10}}{1{,}6.10^{-19}}\sqrt{4\pi.8{,}85.10^{-12}.1{,}56.10^{-10}.9{,}11.10^{-31}}$ = $2{,}31.10^{-7}$ m = 231 nm **[1 т.]** Тази светлина е ултравиолетова. **[0,5 т.]**.

ж) формулата на Ридберг за енергетичните преходи във водородния атом, $E_{n\to m} = const.\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{m^2}\right)$, може да се пренапише във вида $\dfrac{hc}{\lambda_{n\to m}} = A_{отд}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{m^2}\right)$, а оттам $\dfrac{1}{\lambda_{n\to m}} = \dfrac{1}{\lambda_{\min}}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{m^2}\right)$ **[0,5 т.]**, където $\lambda_{\min} = \dfrac{hc}{A_{отд}} = \dfrac{6{,}63.10^{-34}.3.10^8}{13{,}6.1{,}6.10^{-19}} = 9{,}14.10^{-8}$ m = 91,4 nm. Следователно за да съществува такъв преход, трябва да съществуват цели числа n и m такива, че $\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{m^2} = \dfrac{\lambda_{\min}}{\lambda} = 0{,}396 \approx \dfrac{1}{2{,}53}$. В такъв случай обаче n може да е само 1 **[0,5 т.]**. Но тогава при $m > 1$, $1 - \dfrac{1}{m^2} \geq 0{,}75$ **[0,5 т.]**. Излиза, че такъв преход във водородния атом няма **[0,5 т.]**.

Задача 3. **Светодиод**

а) Когато през диода тече ток I, в него се отделя мощност:

$$P_0 = U_0 I\,, \qquad \textbf{[1 т]}$$

защото в работен режим напрежението върху диода е равно на напрежението на запалване. От друга страна, напрежението върху резистора е:

$$U_R = E - U_0 = IR \qquad \textbf{[1 т]}$$

Следователно:

$$P_0 = \frac{U_0(E - U_{0)})}{R}\,, \qquad \textbf{[1 т]}$$

откъдето:

$$R = \frac{U_0(E - U_{0)})}{P_0} = 600\,\Omega \qquad \textbf{[1 т]}$$

б) Пълната мощност, която се отделя във веригата, е;

$$P = EI = \frac{E(E - U_{0)})}{R}\,, \qquad \textbf{[1 т]}$$

Откъдето определяме КПД:

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{U_0}{E} = 0{,}4 \qquad \textbf{[1 т]}$$

в) Когато през светодиода (по-точно p-n прехода) премине един електрон, електричните сили извършват работа:

$$A = Ue\,. \qquad \textbf{[1 т]}$$

Съгласно с условието, тази работа се трансформира изцяло в енергия на един излъчен фотон:

$$Ue = h\nu\,. \qquad \textbf{[1 т]}$$

Като вземем предвид, че:

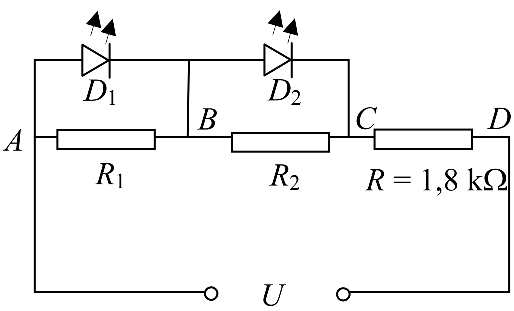
$$\lambda\nu = c\,, \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

получаваме:

$$\lambda = \frac{hc}{eU} = 6{,}22\cdot 10^{-7}\ \text{m} = 622\ \text{nm}\,. \qquad \textbf{[1 т]}$$

Това е светлина от червената област на спектъра. **[0,5 т]**

г)



Фиг. 3.3

При $U < U_1 = 5$ V токът протича само през последователно свързаните резистори, защото диодите са запушени. Падът на напрежение върху D_1 в този случай е:

$$U_{AB} = IR_1 = U\frac{R_1}{R + R_1 + R_2}\,. \qquad \textbf{[1 т]}$$

Когато $U = U_1 = 5$ V, напрежението върху D_1 се изравнява с напрежението на запалване:

$$U_0 = U_1\frac{R_1}{R + R_1 + R_2}\,, \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

откъдето намираме:

(1) $$(U_1 - U_0)R_1 - U_0 R_2 = U_0 R$$

Когато $5\,\text{V} < U \le U_2 = 10\,\text{V}$, диодът D_1 свети и напрежението върху него е фиксирано и равно на U_0, а в същото време през диода D_2 не тече ток Тогава резисторите R_2 и R са свързани последователно и през тях тече ток:

$$I = \frac{U - U_0}{R + R_2}$$ **[1 т]**

Напрежението върху D_2 е:

$$U_{BC} = IR_2 = \frac{(U - U_0)R_2}{R + R_2}.$$

Когато $U = U_2 = 10\,\text{V}$, напрежението върху D_2 достига напрежението на запалване:

$$U_0 = \frac{(U_2 - U_0)R_2}{R + R_2},$$ **[0,5 т]**

Откъдето получаваме:

(2) $$R_2 = R\frac{U_0}{U_2 - 2U_0} = 600\,\Omega.$$ **[1 т]**

Заместваме получената стойност в уравнение (1) и получаваме съпротивлението на първия резистор:

(3) $$R_1 = R\frac{(U_2 - U_0)U_0}{(U_1 - U_0)(U_2 - 2U_0)} = 1600\,\Omega.$$ **[1 т]**

<u>Задача 4.</u> Модел на ядро

а) От изискването обемът на потенциалната яма с форма на куб да е равен на обема на ядрото получаваме

$$a = \left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)^{1/3} \approx (4A)^{1/3} r_0.$$ **(1т.)**

б) Енергията на един нуклон се определя с израза

$$\varepsilon = U_0 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_N}.$$ **(1т.)**

Като отчетем за всяко независимо движение формулата на Дьо Бройл

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$ **(1т.)**

получаваме

$$\varepsilon = U_0 + \frac{4\pi^2\hbar^2}{2m_N}\left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2}\right)$$ **(1т.)**

Съгласно с вълновите свойства на частиците възможните стойности на $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ следват от формирането на стоящи вълни между всеки две стени на потенциалната яма

$$n_x\frac{\lambda_x}{2} = a, \quad n_x = 1,2,3,...$$ **(0,5 т.)**

$$n_y\frac{\lambda_y}{2} = a, \quad n_y = 1,2,3,...$$ **(0,5 т.)**

$$n_z\frac{\lambda_z}{2} = a, \quad n_z = 1,2,3,...$$ **(0,5 т.)**

Тогава за възможните стойности на енергията на един нуклон получаваме

$$\varepsilon_{n_x,n_y,n_z} = U_0 + \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_N a^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) = U_0 + 0{,}31\frac{\hbar^2}{m_N r_0^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right).$$

(1,5 т.)

в) Съгласно с принципа на Паули в дадено състояние с определени n_x, n_y, n_z могат да се намират най-много два протона с противоположни спинове и два неутрона с противоположни спинове. **(1 т.)** На енергетичното ниво $\varepsilon_{1,1,1}$ се намират два протона и два неутрона **(1 т.)**, а на нивото $\varepsilon_{2,1,1} = \varepsilon_{1,2,1} = \varepsilon_{1,1,2}$ – шест протона и шест неутрона **(1 т.)**, а останалите енергетични нива са празни. **(1 т.)** Енергията на основното състояние на ядрото на кислорода ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ е равна на

$$E_0 = 16U_0 + 0{,}31(4.3 + 12.6)\frac{\hbar^2}{m_N r_0^2} \approx -244\ \mathrm{MeV} \qquad \textbf{(2 т.)}$$

г) Честотата на фотона е

$$\nu_{\min} = \frac{-\varepsilon_{2,1,1}}{2\pi\hbar} \approx 3.10^{21}\ \mathrm{Hz}, \qquad \textbf{(2 т.)}$$

т.е. фотонът е γ-квант.